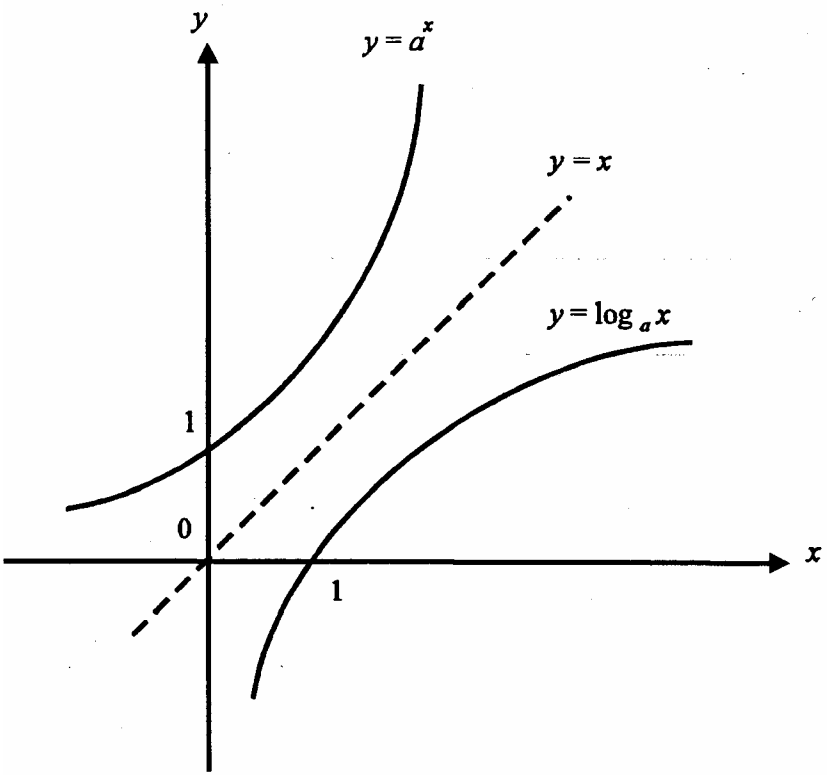
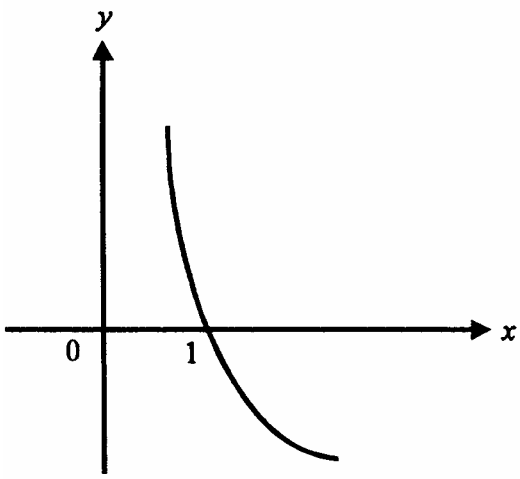
單元 4：對數函數

4.1 對數函數 $f(x)=\log_a x$ (a > 0 且 $a \neq 1$) 的性質和圖像

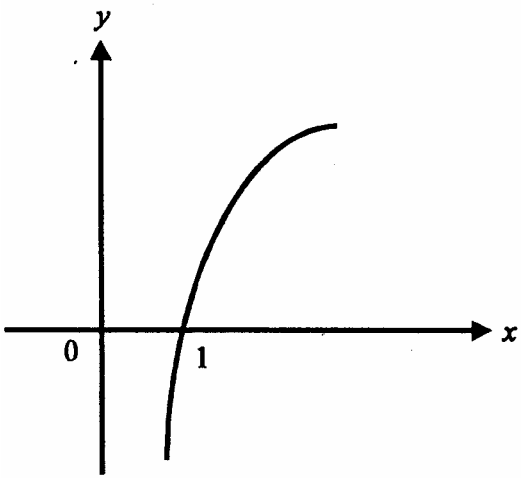
對數函數是與指數函數相對的逆函數。以下是 $y = x$ ， $y=a^x$ 及 $y=\log_a x$ 的圖像。學生可從該圖發現， $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的圖像對應於 $y=x$ 的反映。



從下列 $y=\log_a x$ 的圖像可讀得以下的對數函數性質：.



$y=\log_a x$ $(0 < a < 1)$ 的圖像



$y=\log_a x$ $(a > 1)$ 的圖像

(i) $x > 0$ 時，$\log_a x$ 才有定義。

(ii) 當 $0 < a < 1$ 時，$\log_a x$ 隨 x 增加而遞減，且 $\log_a x \begin{cases} > 0 & \text{當 } x < 1, \\ = 0 & \text{當 } x = 1, \\ < 0 & \text{當 } x > 1. \end{cases}$

(iii) 當 $a > 1$ 時，$\log_a x$ 隨 x 增加而遞增，且 $\log_a x \begin{cases} < 0 & \text{當 } x < 1, \\ = 0 & \text{當 } x = 1, \\ > 0 & \text{當 } x > 1. \end{cases}$

(iv) $\log_a a = 1$

以下是對數的性質：

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(c) $\log_a x^n = n\log_a x$

教師可提供這些性質的證明，但學生無須學習底的轉換。

<u>例一</u>

設地震強度以黎克特制單位表示，其關係式爲 $R = \log_{10}(I)$，其中 R 是單位數值，I 代表相對地震強度。

(i) 以指數形式寫出關係式。

(ii) 1997 年 6 月在印尼發生的地震強度是黎克特制 6.5 級，同年 5 月在日本發生的地震爲 7 級。究竟日本地震強度是印尼地震強度的多少倍 ？

在某個特別情況，當底數 $a = e$ 時，$\log_e x$ 或 $\ln x$ 稱爲自然對數，是指數函數的逆函數。教師應向學生介紹及討論自然對數的重要性。

<u>例二</u>

以下是一鐵棒冷卻時溫度與時間的關係：

時間 t (小時)	0.5	1	1.5	2	2.5	3
溫度 T (°C)	185	137	100	75	56	42.5

證明時間 t 與溫度 T 的關係式爲 $T = T_0 e^{-kt}$，其中 T_0 及 k 爲常數。鐵棒於何時降溫至 50 °C?

4.2 簡易對數方程的解法

學生應知道如何解簡易對數方程，如：

(i) $\log_4(x-2)+\log_4(x+1)=1$

(ii) $3\cdot 2^x=5^{x-1}$

注意：必須作根的驗算。

4.3 將 $y=kx^n$ 及 $y=ka^x$ 化爲綫性關係式

於 $y=kx^n$ 的左右方取對數，可得出 $Y=nX+c$ ，其中 $X=\log_{10}x$ ，$Y=\log_{10}y$ 及 $c=\log_{10}k$ 。

$Y=nX+c$ 方程在 x - y 坐標系上代表一直綫，斜率爲 n，y 軸截距爲 c。

很多時，x 和 y 的值可從實驗求得。因此，如給出多對 x， y 值，學生可描繪出 $\log_{10}y$ 對 $\log_{10}x$ 的圖像。利用圖像中的斜率和 y 軸截距可確定 n 和 k 的值。

同樣地，若 $y=ka^x$ ，描繪出 $\log_{10}y$ 對 x 的圖像便可定出 a 及 k 的數值。

<u>例一</u>
下表表示出燈泡照明度與不同距離的關係式：

照明度 I (坎德拉)	500	31.25	17.58	7.8	6.17
距離 d (米)	0.3	1.2	1.6	2.4	2.7

以 $I=kd^n$ 形式表示該定律。