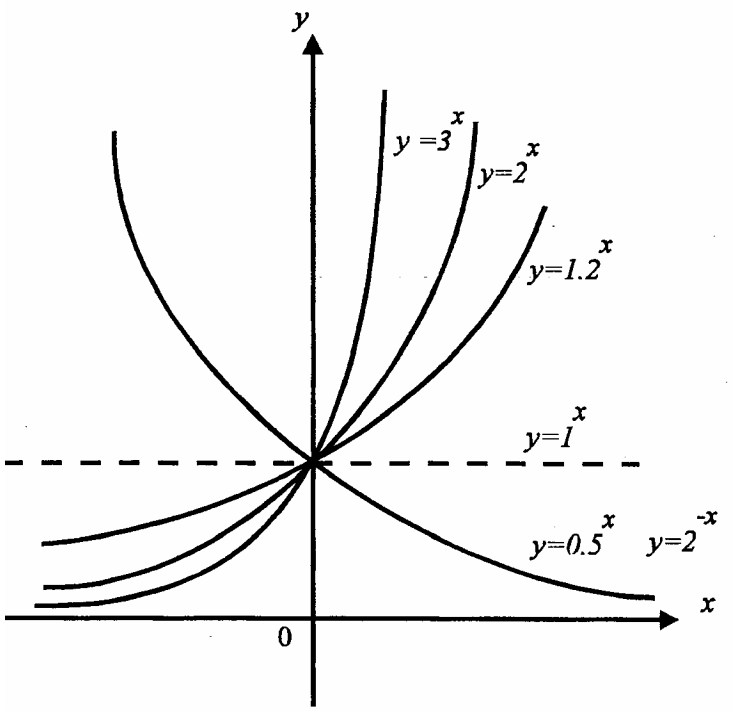
单元 3：指数函数

3.1 指数函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的性质和图像

教师可着学生描绘 $y=2^x$ $(-3\le x\le 5)$ 的图像。这种函数的指数为变量，称为指数函数。学生应可辨别 $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=2^x$ 的图像在形状上不同之处。

下图为 a 取不同正值时函数 $y=a^x$ 的图像：



从以上图像，学生可了解：(i) $y=a^x$ $(a>1)$，及 (ii) $y=a^x$ $(0<a<1)$ 的一般形状。他们应能发现每幅图像皆在 x-轴以上及与 y-轴的交点为 (0, 1)。

特别留意，当 $a=e$，而 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+\cdots+\frac{1^r}{r!}+\cdots\approx 2.71828$ 时，

$y=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots$ 称为指数级数。

可与学生温习以下指数定律：

(i) $a^x>0$， x 为实数

(ii) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

(iii) $a^p\div a^q=a^{p-q}$

(iv) $\left(a^p\right)^q=a^{pq}$

(v) $a^0=1$

在自然现象中，很多规律都满足指数函数的性质，例如人口增长、细菌繁殖、物质的冷却率、物体的热能散失、物质增长及衰变、统计学的函数等。这些规律都可以用指数函数 $y = a^x$ 表示。

现代统计学中，几乎每个重要的概率分配函数，用微积分计算时，都以 e 的指数函数为重点，以后再详论。

指数函数 $y = a^x$ $(a > 1)$ 与投资在恒利率的复利息相似：

$$A(n) = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

T这增长可称为复利息定律 (C.I.L.)。指数函数在科学和科技上非常重要，因为许多现象都依从复利息定律。人口增长、细菌数目的增长，亦依从这定律。

另外还有物质衰变定律：

$$y = ak^{-bx}$$

在任意给定时刻中，数量减少的率与量成正比。

放射性元素的衰变指数便是一个很好的例子：

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

学生学习了微分法之后，教师可提及 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$，这是认识指数函数性质的好例子。

3.2 简易指数方程的解法

学生应知道如何解简易指数方程，如

(i) $3^{2x} = 27^{x+1}$

(ii) $2^{2x} + 5(2^x) - 14 = 0$