单元 8：不定积分法

8.1 不定积分法

教师可利用简单的代数式如 $2x$ 及 x^2 去引出若 $F'(x)=f(x)$ 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数这概念，并鼓励学生找出 $2x$ 的另一些原函数，从而了解求某函数的原函数是微分法的逆运算。但是，该运算程序所产生的原函数并不是唯一的，而是一组只相差一个常数项的函数。教师可利用图像帮助学生领略这概念。

<u>例一</u>

设 $f(x)=3x^2+1$，$G(x)=x^3+x+1$，$F(x)=x^3+x+9$，则很容易就看出 $F'(x)=f(x)$ 且 $G'(x)=f(x)$。

求出某函数的原函数，这个程序称为不定积分法。

教师这时可介绍关系式 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ ，并应强调积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 只是一个记号，积分符号 $\int$ 表示对函数 $f(x)$ 作出积分运算；$\mathrm{d}x$ 则凸显该运算是对应变量 x 而作出的，而 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 并不表示 $f(x)$ 乘以 $\mathrm{d}x$。

学生应学会求不定积分的导数，同时验算其答案是否准确。教师应用例子去讨论怎样求得不定积分的常数 C。C 的意义亦应详加解释。

8.2 一些不定积分法的公式

学生应能以微分法的逆运算去求不定积分，及能掌握以下积分定理：

(i) $\int k\,\mathrm{d}x=kx+C$， k 为常数；

(ii) $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$， $n\neq -1$;

(iii) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$， $x\neq 0$;

(iv) $\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$，

(v) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$， k 为常数；

(vi) $\int [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x$

例一

在奥运会开幕前的 16 天，一电视台拟进行一推广活动以增加体育台的收视人数 $N(t)$。设在推广活动举行前，电视台有 300,000 位观众。电视台管理层预期观众人数的增加率为 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=100(32-2t)$，其中 $0\le t\le 16$。求推广活动举行后，观看奥运会开幕仪式的人数。学生应学会利用 $t = 0$、$N = 300{,}000$这个数据去求原函数。

8.3 代换积分法

在讲解本课题时，教师可运用一些如下的例子作为引入：

$\int(2x+1)^5\,\mathrm{d}x$，$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$。

教师应指出，采用不同的代换去求不定积分可得出表面上不同的结果，不过只是常数项的差异而已。例如：

$$\int(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{(x+1)^2}{2}+C_1,$$

$$\int(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+C_2。$$

至于分部积分法则不在本课程范围内。