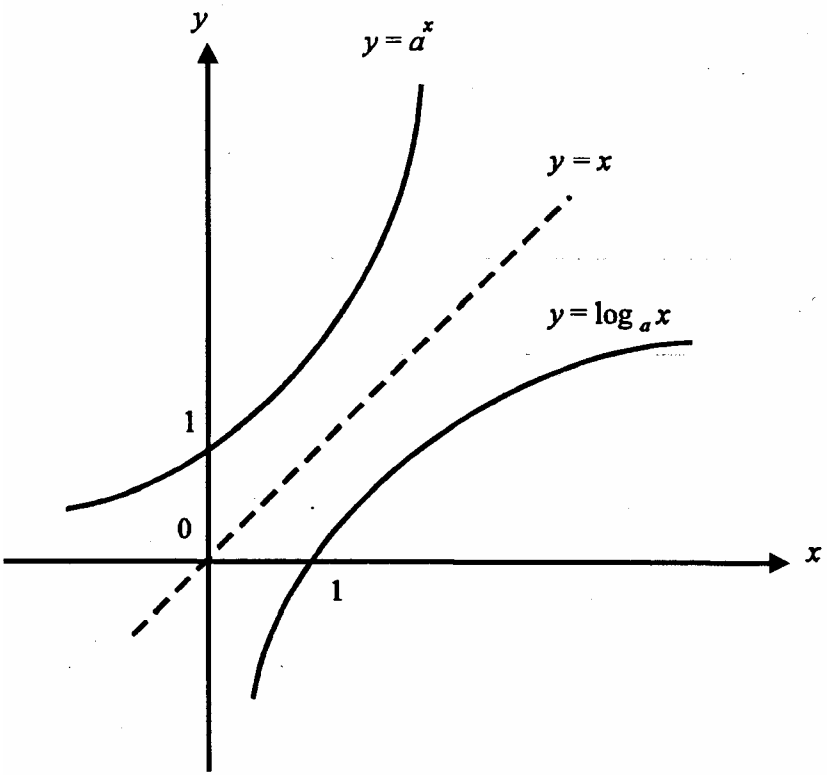
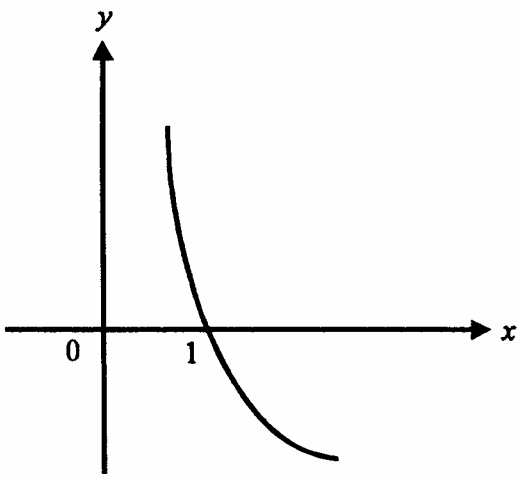
单元 4：对数函数

4.1 对数函数 $f(x)=\log_a x$ (a > 0 且 $a \neq 1$) 的性质和图像

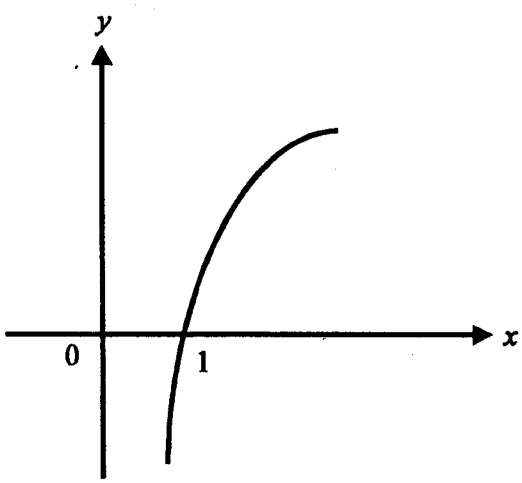
对数函数是与指数函数相对的逆函数。以下是 $y=x$ ， $y=a^x$ 及 $y=\log_a x$ 的图像。学生可从该图发现， $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的图像对应于 $y=x$ 的反映。



从下列 $y=\log_a x$ 的图像可读得以下的对数函数性质：.



$y=\log_a x$ $(0 < a < 1)$ 的图像



$y=\log_a x$ $(a > 1)$ 的图像

(i) $x > 0$ 时，$\log_a x$ 才有定义。

(ii) 当 $0 < a < 1$ 时，$\log_a x$ 随 x 增加而递减，且 $\log_a x \begin{cases} > 0 & \text{当 } x < 1, \\ = 0 & \text{当 } x = 1, \\ < 0 & \text{当 } x > 1. \end{cases}$

(iii) 当 $a > 1$ 时，$\log_a x$ 随 x 增加而递增，且 $\log_a x \begin{cases} < 0 & \text{当 } x < 1, \\ = 0 & \text{当 } x = 1, \\ > 0 & \text{当 } x > 1. \end{cases}$

(iv) $\log_a a = 1$

以下是对数的性质：

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(c) $\log_a x^n = n\log_a x$

教师可提供这些性质的证明，但学生无须学习底的转换。

<u>例一</u>

设地震强度以黎克特制单位表示，其关系式为 $R = \log_{10}(I)$，其中 R 是单位数值，I 代表相对地震强度。

(i) 以指数形式写出关系式。

(ii) 1997 年 6 月在印度尼西亚发生的地震强度是黎克特制 6.5 级，同年 5 月在日本发生的地震为 7 级。究竟日本地震强度是印度尼西亚地震强度的多少倍？

在某个特别情况，当底数 $a = e$ 时，$\log_e x$ 或 $\ln x$ 称为自然对数，是指数函数的逆函数。教师应向学生介绍及讨论自然对数的重要性。

<u>例二</u>

以下是一铁棒冷却时温度与时间的关系：

时间 t (小时)	0.5	1	1.5	2	2.5	3
温度 T (°C)	185	137	100	75	56	42.5

证明时间 t 与温度 T 的关系式为 $T = T_0 e^{-kt}$，其中 T_0 及 k 为常数。铁棒于何时降温至 50 °C?

4.2 简易对数方程的解法

学生应知道如何解简易对数方程，如：

(i) $\log_4(x-2)+\log_4(x+1)=1$

(ii) $3\cdot 2^x=5^{x-1}$

注意：必须作根的验算。

4.3 将 $y=kx^n$ 及 $y=ka^x$ 化为线性关系式

于 $y=kx^n$ 的左右方取对数，可得出 $Y=nX+c$，其中 $X=\log_{10}x$，$Y=\log_{10}y$ 及 $c=\log_{10}k$。

$Y=nX+c$ 方程在 x - y 坐标系上代表一直线，斜率为 n，y 轴截距为 c。

很多时，x 和 y 的值可从实验求得。因此，如给出多对 x， y 值，学生可描绘出 $\log_{10}y$ 对 $\log_{10}x$ 的图像。利用图像中的斜率和 y 轴截距可确定 n 和 k 的值。

同样地，若 $y=ka^x$，描绘出 $\log_{10}y$ 对 x 的图像便可定出 a 及 k 的数值。

<u>例一</u>
下表表示出灯泡照明度与不同距离的关系式：

照明度 I (坎德拉)	500	31.25	17.58	7.8	6.17
距离 d (米)	0.3	1.2	1.6	2.4	2.7

以 $I=kd^n$ 形式表示该定律。