单元 13：伯努利、二项、几何及泊松分布

13.1 随机变量、概率函数和离散概率分布

(i) 教师应透过日常生活例子讲解随机变量的概念。

(ii) 跟着可讨论离散随机变量，至于连续随机变量可留待教授正态分布后才一并研究。

离散及连续随机变量的基本分别是：

离散随机变量 — 过程与数算有关，取值能够一一列举出来，例如：
(a) 一场篮球比赛某队所得的总分
(b) 在一小时内某城市所录得的交通意外数目
(c) 每年所订阅杂志的数目

连续随机变量 — 过程与量度有关，取值由量度而得，例如：
(a) 日落时间
(b) 一袋米的平均重量
(c) 体温

(iii) 可用简单例子说明离散概率分布，如：
(a) 一本书内某一页的错字数目
(b) 每班学生内左撇子学生的数目

(iv) 教师应指出随机变量的平均值与方差的定义。须加强学生明白平均值及方差是用来描述一组数据的中心趋势及离散度。

13.2 伯努利分布

伯努利分布适用于只有两种结果 (成功 / 失败) 的实验。日常生活例子如：

(i) 一位没有温习的学生而能猜中选择题的答案。
(ii) 随机地在一班学生内抽出左撇子的学生。

伯努利分布的概率函数为：

$$f(x; p) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

其中 p 为成功的概率。
平均值 $= p$；方差 $= p(1-p)$。

13.3 二项分布

二项分布可有 n 个独立及相同的伯努利试验产生，其中 p 为每一次试验成功的概率。例如：在 10 题考试选择题目当中，某学生猜中正确答案的题数的分布。

二项分布的概率函数为：

$$f(x;\, n,\, p) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

平均值 $= np$，方差 $= \sigma^2 = np(1-p)$ 。无须证明。
二项分布可用 $\mathrm{Bi}(n,\, p)$ 或 $\mathrm{Bi}(x;\, n,\, p)$ 来表示。

无须运用二项分布表。

13.4 几何分布

几何分布是在连续 x 次独立及相同的伯努利试验中最后一次才得到成功的分布。例如：一份选择试题当中，学生直至第 x 题才猜中正确答案的分布。

几何分布的概率函数为：

$$f(x;\, p) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1,\, 2,\, \ldots$$

平均值 $= \mu = \dfrac{1}{p}$，方差 $= \sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$。无须证明。

学生须知道几何分布与二项分布的异同：

x 次试验中最后一次得到成功的分布→几何分布
在 n 次试验中得到 x 次成功的分布→二项分布

13.5 泊松分布

泊松分布是探讨某一事件在某段时间或空间发生的次数的概率分布。实际生活中许多随机变量都符合泊松分布，例如：

(i) 一油站在一分钟内汽车抵达的数目
(ii) 于繁忙时间的五分钟内排队等巴士的乘客增加数目
(iii) 某电话台于 30 秒内接到来电的次数
(iv) 一本书内某一页的错字数目
(v) 击中目标的炸弹数目

泊松分布的概率函数为：

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots；\quad \lambda > 0$$

泊松分布可用 $\mathrm{Po}(x;\lambda)$ 或 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 来表示。

平均值 $=\lambda$，方差 $=\sigma^2=\lambda$。无须证明。

泊松分布一般建基于以下的假设：

(i) 事件随机地发生于某段时间或空间内
(ii) 某一刻中，事件最多只会发生一次
(iii) 事件以一常数率 λ 发生于某段时间或空间内
(iv) 事件之间独立地发生

泊松分布其实为二项分布的极限形态，当 $n\to\infty$ 而 $p\to 0$ 并平均值 $=np=\lambda=$ 常数时。

无须运用泊松分布表。

13.6 伯努利、二项、几何及泊松分布的应用

讲授本单元时，宜着重以生活实例为讨论素材。

二项合布

<u>例一</u>
若一推销员随机地从电话簿中抽取顾客推销订阅杂志，成功率为 0.1 。某晚，推销员作出 6 次电话推销，问以下事件发生的概率：
(i) 没有人订阅杂志；
(ii) 刚好 3 人订阅杂志；
(iii) 最少有 3 人订阅杂志；
(iv) 最多有 3 人订阅杂志。

几何分布

<u>例一</u>
设一学生在测验的每一次的合格率为 0.6 。求他于第二次测验才合格的概率。

<u>例二</u>
设香港天文台每天正确预测天气的概率为 0.8 。求在未来数天，直至第 4 天才能作出正确预测的概率。

泊松分布

<u>例一</u>
一保险公司发现，每天因遗失物品或受伤而要求赔偿的个案之平均值为 3.1。求下列事件发生于某天的概率：

(i) 少于 2 个索价个案；
(ii) 刚好 2 个索偿个案；

(iii) 2 个或更多的索偿个案；
(iv) 多于 2 个索偿个案。

例二

根据以往经验，1% 的电话费单会寄失。现取 10 张电话费单作为样本，求最少一张会寄失的概率。请用两种概率分布函数 (二项分布与泊松分布) 来解题，及简略比较与解释其结果。