单元 7：微分法的应用

7.1 斜率

教师可用圆形向学生介绍 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 这个差商的几何意义。

学生应了解，当 Δx 趋向 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限值为经过曲线上一点 $(x, f(x))$ 的切线的斜率，并明白曲线 $y=f(x)$ 于某点 $(x, f(x))$ 的法线概念。学生应能掌握简单曲线的切线及法线方程的求法。

学生应可利用导数值符号的改变来决定有关函数的递增区域及递减区域。

教师可首先利用曲线图像解释曲线的凸性，亦可利用简单函数（如：$y=e^x$，$y=\ln x$，$y=3x^3-1$）去阐释曲线凸性的概念，并指出曲线在某点有凸性改变时，该点称为拐点。学生应能求出曲践的拐点。

7.2 极大和极小

当学生已掌握了斜率及曲线凸性的知识后，便可与他们讨论转向点的理念。教师可利用图像提醒学生以下各点：

(i) 曲线的驻点不一定是它的转向点。

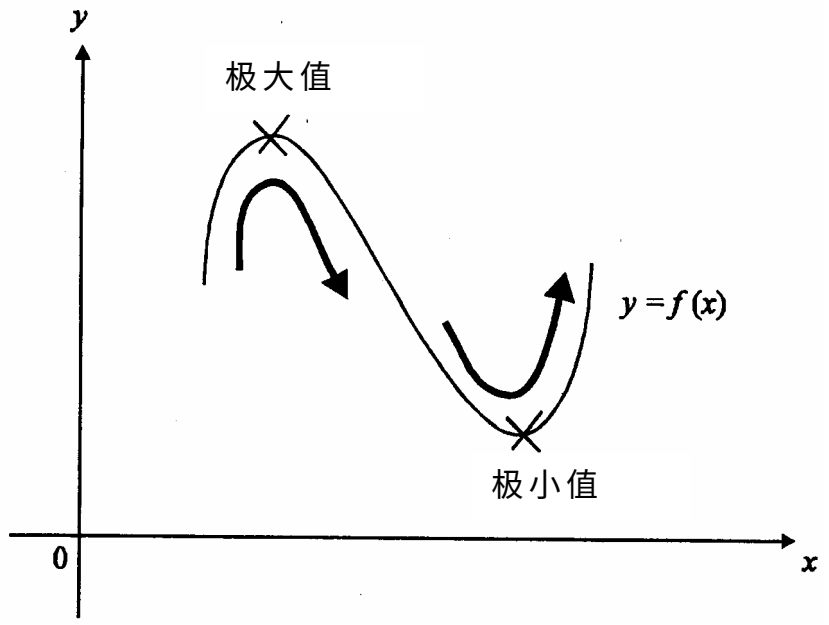
<u>例一</u>
对于 $f(x)=2x^3$，$f'(x)=6x^2$，所以 $f'(0)=0$。但在其它位置，$f'(0)>0$，因此 $(0, 0)$ 是曲线的驻点而不是它的转向点。

(ii) 一个函数的极大值或极小值并不一定是它的最大值或最小值。

教师可教导能力较高的学生，转向点可发生于在某些不存在导数的点（如：$f(x)=3x^{\frac{2}{3}}$）。教师应特别指出，当 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq 0$ 时，仍可能有极大或极小值存在，例如 $y=3x^{\frac{2}{3}}$。

极大值、极小值及拐点的判别可由以下两个基本试验决定：

(i) 一阶导数的符号改变。学生可通过图像直观地了解其过程。



(ii) 二阶导数的符号。教师应强调，当 $f''(a)=0$ 时，不能对 $(a,\ f(a))$ 点的凸性下任何结论。在此情况下，学生须用另一方法来决定那些点的特性。学生应能判断采用何种方法较适合。

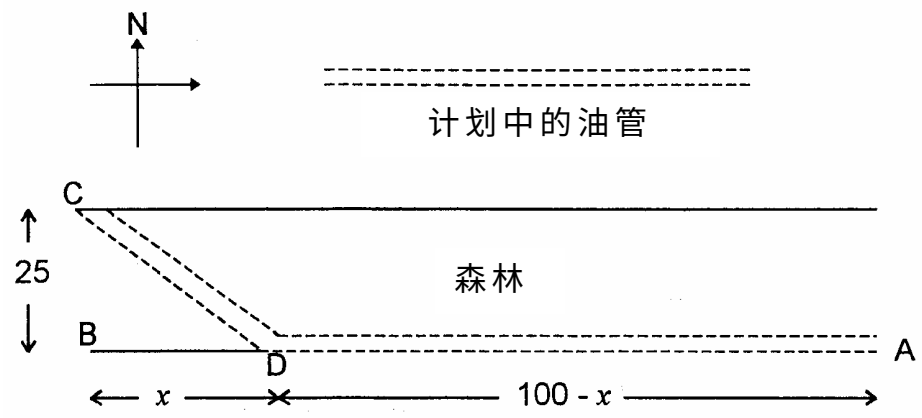
<u>例二</u>

$f(x)=3x^4$的最小值在 $(0,0)$ 点，但 $f''(0)=12(0)^2=0$。所以不能用二阶导数的符号作试验。

在实际问题上，须将变量的定义域限制在一个范围，故在寻找函数的最大值或最小值时，需一并考虑定义域的临界值。教师可用现实生活例子解释。

<u>例一</u>

一产油公司计划建造一油管从油井 A 点输送原油至 C 点，然后把石油以油轮运走。计划图则如下 ：



A 点与 C 点给森林相隔，该森林阔 25 km，C 点在 A 点以西 100 km。假设沿着森林建造油管的费用为每公里 $100,000，穿过森林时则为每公里 $200,000。试决定图中交点 D 的位置，以便将建造油管的成本降到最低。

例二

要设计一个没有盖的金属圆柱体容器，其固定容积为 $V\ \text{cm}^3$。若该容器的设计要符合以下条件，试以其半径 r cm 表示其高 h cm：

(i) 容器的表面面积为最小；

(ii) 容器的焊接边长为最短。

例三

设 t 年后某城市的人口会达到 $P(t)=\dfrac{150}{1+2e^{-0.02t}}$ 百万 $(t\geq 0)$。随着时间过去，城市人口会趋向一固定值 P_0 百万。求这个固定值。求 $P''(t)$，由此求出人口增长最快的年份，答案须准确至最接近的整数。

7.3 描绘简单曲线

描绘函数 $y=f(x)$ 的图形时，应考虑下列各点：

(i) 定义域；

(ii) 递增区域或递减区域；

(iii) 局部极大值及局部极小值；

(iv) x 及 y 的截距；

(v) 当 $x\to\pm\infty$ 时，函数的状态；

(vi) 曲线的凸性及拐点。

学生应能描绘多项式及 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 形式的有理函数的图形。

此外，学生应学会求得曲线的垂直及水平渐近线的方法。

例一

流行性感冒在某城市散播。根据以往记录，在相似情况下，受感染的人数为一 $N(t)$ 函数，而 $N(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+10t^2+300t+250$，其中 t 以日为单位及 $0\leq t\leq 40$。试描绘函数 $N(t)$ 在 $0\leq t\leq 40$ 期间的图像，并且

(i) 解释 $N(0)$ 的数值；

(ii) 求第 10 日后、第 35 日后受感染的人数；

(iii) 求细菌于 $t=11$ 日及 $t=12$ 日时的瞬间散播速率；

(iv) 求受感染人数的最大速率；

(v) 解释图像拐点的意义。

例二

若函数 $f(x)=\dfrac{64(x+3)}{x+8}$ 表示某见习生完成 x 次打手练习课后，在单位时间内打得的正确字数。试绘画函数 $f(x)$ 的图像，并估计该见习生完成大量练习后的表现。

7.4 变率

讲授本节时，教师应明确指出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可了解为 y 对于 x 的变率。并举出涉及不同变率的例子：

例一

一油轮触礁，漏出原油，形成 0.02 m 厚的圆形油污块。当油污半径为 50 m 时，半径以每分钟 0.5 m 速率向外扩散。计算这时漏出油污的表面面积及体积增加率。

例二

设某生产收音机的电子公司成本为 $\$C$，收入为 $\$R$，利润为 $\$P$，各项的计算公式为：$C=5000+2x$；$R=10x-\dfrac{x^2}{1000}$ 及 $P=R-C$，其中 x 表示每星期生产的收音机数目。设当产量为 2,000 部时，产量以每星期 500 部的速率增加，求这时的成本、收入及利润的增加率。

例三

设一梯子长 8 m，斜靠在一堵垂直的墙上，已知梯子的底端正以 2.5 m/s 的速率滑离墙脚，当梯子的顶端兴地面的距离为 6 m 时，求该顶端往下滑动的速率。

教师可要求学生在求解前先估算答案。

其它例子如某人在路灯下走过，人影长度的变率问题；倒立正圆锥体容器的漏水问题等，亦可用作讲解。

7.5 近似值

学生应学会一次微分的几何意义，包括：

$\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ 及 $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y\approx f(x)+f'(x)\Delta x$。

学生应可运用微分去计算在接近某特殊数值时函数值的近似值，并以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 作简单的误差估计。

例一

求 $\sqrt{9.03}$ 的近似值。

例二

在一实验中，一球体的直径量度为 x cm，其体积 V cm^3 可用公式 $V=\frac{1}{6}\pi x^3$ 计算出来。若量得球体直径为 10 cm，量度误差为 0.02 cm，试估计球体体积的最大及最小的可能值。

例三

在制造机械钟的过程中，钟摆的长度出现误差。一个长度为 ℓ 米的单摆，其摆动周期为 T 秒，而 $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$，其中 g 为常数。如果钟摆的长度有 3% 的误差，求在计算 T 时的误差百分率之近似值。