單元 5：極限和導數

5.1 函數的極限

在本節內，教師可以用直觀的方法介紹函數的概念、記法及極限。介紹極限的概念時，可以用手提電話電池的再充電，粒子的加速度極限、細菌的繁殖來作為例子。教師可用列表及繪圖方式列出無窮小的變化，以顯示當 x 趨向數值 a 時，$f(x)$ 極限的意義，這個極限可記作 $\lim_{x\to a} f(x)=L$。

教師應避免引入 ε - δ 的概念。可運用電腦幫助學生領略有關的概念。學生應能了解，當 x 趨向 a 時，$f(x)\to\pm\infty$ 沒有極限存在。

教師應與學生討論一些極限存在和不存在的例子，如 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ 及 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{|x-5|}$。學生應能發現，縱使 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ 存在，但函數 $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ 在點 $x = 5$ 是沒有定義的。教師亦應同時提及當 x 趨向 $\pm\infty$ 時，函數 $f(x)$ 的極限。

有關三角函數的極限不在本課程內。

在講授極限的定理時，教師只陳述下列各點而無須給予證明：有關函數的和、差、積、商的極限，純量乘法及複合函數的極限。學生只需掌握函數極限概念，以便日後學習函數導數的概念。

教師可與學生討論當 h 趨向 0 時，$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的極限值，以便引入微分法的概念。

<u>例一</u>

設充電的電池能量（焦耳）以函數 $E(t)=10\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)$ 表示，其中 t（小時）表示充電時間。求電池於充電 1 小時，2 小時及 4 小時後的能量。求電池的最終能量水平。

5.2 函數的導數

教師應介紹函數導數的常用記號如 $f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'$，$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 等。教師應強調，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是一個符號而不是一個分數同時應示範如何從基本原理去求下列函數的導數：

x^4；$\sqrt{x+1}$；$x^2(x+2)$ 及 $\frac{1}{x-1}$。

學生應能掌握求簡單函數的導數的方法。再者，學生亦須知道 $f'(x)$ 與 $f'(a)$ 的分別，其中 a 為一定值。