单元 9：定积分法

9.1 定积分

定积分可被定义为一和数的极限。向学生介绍 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 时宜采用直观的手法。

教师应清楚解释定积分与不定积分不同的地方。定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一实数，不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 则是 $f(x)$ 的反导数。

<u>例一</u>

设一公司每月生产 x 部电视机，其边际利润 $\$P(x)$ 为 $\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = 165 - 0.1x$，$0 \le x \le 4000$。

该公司现今每月生产 1,600 部电视机，计划增加产量。若产量由 1,600 部增加 至 2,000 部，求这间公司的利润改变。

9.2 定积分的性质

教师应列举足够的例子去说明定积分以下的性质：

(i) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(iii) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(iv) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(v) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

(vi) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

教师应提醒学生，当使用换元法演算积分时，积分的上、下限应作出相应的变换。

9.3 平面圆形面积及其应用

学生应能掌握定积分和曲边梯形面积的关系，并注意到负面积和负值的定积分是两回事。教师可利用日常生活例子向学生讲解各种情况。

学生可直接运用这些知识计算曲线 $y=f(x)$ 与 x-轴，曲线 $x=g(y)$ 与 y-轴及两曲线所围成的面积。教师可绘画有关曲线的图形，以帮助学生思考。

教师宜鼓励学生养成习惯，计算时绘画有关图形，得出所求面积的概况，如此便容易找出有关的界限及求面积的方法。

<u>例一</u>

一所电力公司计划于一大都会的外围建一核电厂。为了要令到公众安心，该公司估计，假使核电厂发生意外，引致大都会有人死亡，死亡人数的函数是 $r(t)=20000e^{-0.2t}$，其中 $r(t)$ 代表每天的死亡人数及 t 代表意外发生后的日数：

(i) 若有事故发生，求 2 日后的死亡人数。
(ii) 若有事故发生，求第 2 日至第 7 日期间的死亡人数。
(iii) 若有事故发生，求 7 日后的死亡人数。
(iv) 若有事故发生，要多少天才令到大都会所有人因这次意外死去？

<u>例二</u>

一邮递传销公司开始推广活动。广告费每天估计为 \$5,950。市场专家估计，公司利润 (不包括广告支出) 随着推广活动的时间而递减，其中纯利润函数 $f(t)=-50t^2+10000$ 代表该推广活动开始 t 日后每天所得的利润。该推广活动会持续，直至广告费超越纯利润为止。

(i) 问推广活动应进行多久？
(ii) 求该段期间广告费总支出。
(iii) 求该段期间撤除广告费后的利润总额。
(iv) 求预期的纯利润。
(v) 设广告支出改为每日 \$5,000 及利润函数变为 $f(t)=-10t^2+9000$，求纯利润值。

9.4 利用梯形法则计算定积分的近似值

有些积分很难用计算方法求得答案 (例如：$\int_1^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$)，因此有必要估计积分值。 梯形法则是求数值积分的一种方法，可求得定积分的近似值。

梯形法则的定义及公式应以实例说明。

教师应当指出，若曲线向上凸时，梯形法则会低估图形的面积 (例如：$y=-x^2+4$)，反之则会高估 (例如：$y=x^2+4$)。对误差估值不在本课程之内。

教师可清楚说明，梯形数目越多，所得的答案越准确。

<u>例一</u>

利用梯形法则及二个等距、四个等距和八个等距，去估计 $\int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x$。答案准确至 4 位有效数字。用那个等距计算出来的问答较准确 ?

<u>例二</u>

下表为火车的车速 (t 是进行时间，v 是速率)。试绘火车的速率与时间图。利用梯形法则，计算 t = 0 至 t = 0.4 所行的总距离。

t (h)	0	0.1	0.2	0.3	0.4
v (km/h)	10	15	23	42	58

<u>例三</u>

设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$，其中 $0\le x\le 1$ 及 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

(i) 利用梯形法则及将积分区分成 5 个子区间，求 I 的估计量 I_1。
(ii) 求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$。
(iii) 利用 (ii) 或其它方法，指出 (i) 中的 I_1 对 I 而言是一高估计量还是一低估计量，并简单解释答案。